



第5章 ボーナス資料

- 序章 -

コースの意図的に短い説明に、もっと多くの例や議論、解説があればいいのにと考えたことはありますか？もしそうであれば、ここはまさにうってつけの場所です！このファイルには、第5章のいくつかのアクティビティに関するボーナス資料が含まれています。

パズルについては、解かれたパズルの多くの例が示されており、それらをどのように作成するかについての追加の解説も含まれています。EFM(Early Family Math)プログラムは、初期の数学は家族と一緒に取り組むべきものであり、親子で一緒に取り組むためのパズルを作ることが、そのプロセスの重要な一部であるという考えに基づいています。それぞれのパズルの要領をつかめば、ほとんど、あるいはすべてのパズルが、比較的簡単に作れるようになります。

これらのパズルの多くには難易度の異なるレベルがあり、それらのレベルをどのように作るかについて、次のページで多くの提案や例が示されています。必ず一番やさしいパズルから始めてください。少し簡単すぎるくらいのパズルで、子どもが成功や理解、楽しさを経験する方が、難しすぎるパズルによって立ちや落胆、過度な負担を感じてしまうよりも、はるかに良いです。子どもが数学の活動に対して自信と意欲を身につけたら、そのときに少しずつ、より大きなチャレンジを取り入れていくとよいでしょう。また、すべてのパズルがすべての人にとって楽しいとは限りませんので、どうも合わないと感じるパズルや活動を無理に押しつけないようにしてください。

以下のページには、次の内容が掲載されています。

- 第5章 - ニムと因数(約数)
- 第5章 - エラトステネスのふるい
- 第5章 - てことモビール
- 第5章 - ボックスの分割
- 第5章 - 文字置換パズル
- 第5章 - 調査 - 図形で遊ぶ
- 第5章 - プロダクトゲーム
- 第5章 - 有限計算機
- 第5章 - ダブル・オア・ナッシング

- 合法的なもの -

すべての家族と一緒に数学を学び楽しむ機会を持つべきです。そのために、Early Family Math は、家族や教育者が非営利目的に限り、許可を得ることなく自由に編集、翻訳、複製、配布できる資料のコレクションです。

第5章 — ニムと因数(約数)

- 導入 -

任意の数、例えば20から始めます。お子さんに先手か後手かを決めさせます。各自のターンでは、現在の数の任意の約数をその数から引くことができます。0にされてしまったプレイヤーが負けです。

- 分析する -

いつものように、このゲームについて学ぶためのよい戦略は、より単純なバージョンのゲームを見ることです。この場合、非常に小さい数から始めることを意味します。あなたのターンで、次のそれぞれの数に直面した場合、結果は次のようになります。1-負け、2-勝ち、3-負け、4-勝ち、5-負け、6-勝ち、7-負け、8-勝ちです。ここまできると、パターンは明らかです。あなたのターンで数が奇数であれば負けになり、偶数であれば勝ちになります。

勝つための戦略を見つけることは大きな一歩ですが、さらに深く考えてみましょう。なぜこれがうまくいくのでしょうか。奇数と偶数には、どのような性質があって、このような状況が生まれるのでしょうか。この問いをお子さんに投げかけ、十分な時間を与えて考えたり試したりさせてください。急ぐ必要はありません。このように問いと格闘する過程は非常に価値があり、途中で省略してしまうべきではありません。

小さな数でいくつか実験してみると、何が起きているのかがすぐに明らかになります。もし奇数の数を持っていれば、その約数はすべて奇数なので、どんな約数を引いても結果は偶数になります。したがって、奇数は次のターンで必ず偶数に変わります。一方、偶数は約数として奇数と偶数の両方を持っています。したがって、状況は少し異なります。しかし、偶数を持っている場合、あなたの目標は相手を奇数にさせることです。そして、それを簡単に実現する方法があります。それは、約数「1」を選んで引くことです！

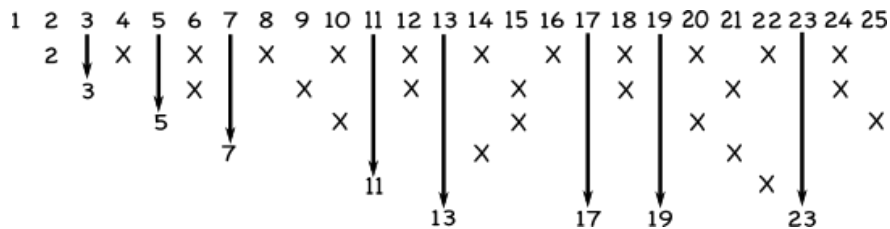
第5章 - エラトステネスのふるい

- 導入 -

1から25まで番号を付けた数直線から始めます。場所やあなたの忍耐が許すのであれば、より大きな範囲でも構いません。

数字の2をその真下にもう一度書きます。その2と同じ高さの行で、2の倍数それぞれの下にxを書きます。

次に、下にxが付いていない最初の数(この場合は3)を下に引き下ろして、次の行に書きます。その行に3を書き、3の倍数すべての下にxを付けます。この作業を同じように続けてください。最後には、すべての素数を書き出したこととなります。1は単位元であり、素数ではないことを忘れないでください。



- 分析する -

この簡単な作業から、素数に関するいくつかの興味深い事実が見えてきます。お子さんが自分でこれらの疑問を思いつくかどうか見てみてください。しかし、自然に出てこない場合は、以下の質問を投げかけてみてください。

1)なぜ下に引き下ろされる数は素数なのでしょう？

合成数を考えてみましょう。この数の下には必ずxが付くことを示したいと思います。合成数であるということは、1とその数自身の間にある数nで割り切れるということです。もしnが素数であれば、すでにその素数nによって、合成数の下にはxが付いています。もしnが素数でなければ、すでに下にxが付いているある素数pによって割り切れます。つまり、pはnを割り切り、さらにnが合成数を割り切るので、結果としてpはその合成数を割り切ります。したがって、素数p倍数に印を付ける際、その合成数の下にもxが置かれることとなります。

2)素数の倍数にxを付けるとき、すでに以前の素数によってxが付いている数があります。それはどのような場合に起こり、どのような場合には起こらないのでしょうか？

上のふるいで、5の倍数を見てみましょう。倍数の 5×2 、 5×3 、 5×4 はすでにxが付いています。新しくxを付けるのは 5×5 だけです。これは、 5×2 、 5×3 、 5×4 がすべて2や3などの以前の素数の倍数だからです。新しい場所にxを付けたい場合、5を掛ける数は5以上の素数だけを素因数に持つ数にする必要があります。すべてを管理するのは少し面倒なので、実際には奇数の倍数だけにxを付けてそれで済ませる人もいます。

3)このふるいでは、行の中で新しいxを有効に生み出した最後の素数は何でしたか？

このふるいでは、有効なxを持つ素数は、2、3、5です。7と11の倍数は、すべて以前に付けられた古いxでした。前の問題の答えを見ると、ここでの答えが分かります。新しいxを得る唯一の方法は、ある素数に対して、その素数以上の素数を掛けることです。7のような素数に到達し、 7×7 が25より大きくなると、それを調べる必要はありません。したがって、平方が最後の数以下である素数だけを調べればよいのです。

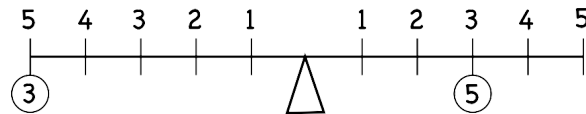
4)例えば53のような数を与えられた場合、それが素数であることを確かめるためには、どの素数で割る必要がありますか？

前の問題の答えから、平方が53以下である素数だけを調べればよいことが分かります。それらの素数は2、3、5、7です。これらのどれも53を割り切ることはできないので、53は素数であるに違いありません！

第5章 - てことモビール

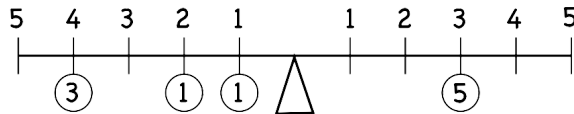
- てこの作用 -

てこの原理では、てこの一方の側で質量によって加えられる力は、その質量に支点(フルクラム)からの距離を掛けたものに等しいとされています。



上のてこでは、左側の3は支点から5の距離にあるため、その力は $3 \times 5 = 15$ となります。右側の5は支点から3の距離にあるため、その力は $5 \times 3 = 15$ となります。このてこはバランスが取れています。

一方の側に複数のおもりがある場合、それらの力は合計されます。



このてこでは、左側は $3 \times 5 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 15$ 、右側は $5 \times 3 = 15$ となります。したがって、バランスが取れています。

これらの問題では、整数のみを使うことに制限します。同じ位置に複数のおもりを掛けることを許すかどうかは自分で決めてかまいませんが、以下の説明では、同じ位置に複数のおもりを掛けてもよいものと仮定します。

- てこ -

支点の反対側に置くための3単位のおもりと5単位のおもりがあります。バランスを取るためには、どこに置けばよいでしょうか。答えとしては、距離が5と3の場合が考えられますが、10と6の場合でもよく、さらに15と9のような、より大きな答えも考えられます。お子さんがどのような答えを出しても、それについて柔軟に話し合うようにしてください。

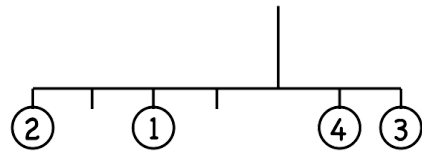
てこの一方の側に3単位と5単位のおもりを置くとして、反対側には、どの重さのおもりを、どの距離に置くことができますか。この問題は、第4章の最後にある「数えてみましょう」のページの問いを発展させたものです。これまでと同様に、さまざまな重さの組み合わせを試してみてください。3と5を4と5、4と9、または6と9に置き換えると、どのようなことが起こるでしょうか。

この最後の問題は、3単位と5単位のおもりを支点の反対側に置いた場合、どのように変わりますか？ この場合、 $3 \times 2 = 5 \times 1 + 1 \times 1$ となるので、1単位のおもりを簡単に量ることができます。では、この方法で他にどのようなおもりを量ることができるでしょうか？

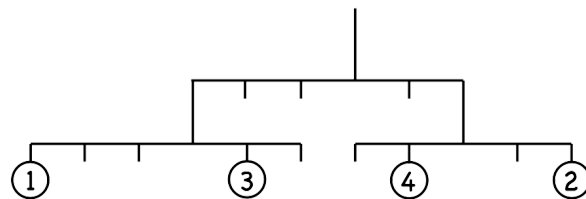
- モビール -

いくつかのおもりと、取り付け点があるモビールの設計が与えられます。各取り付け点には最大で1つまでのおもりを付けて、モビールのすべての腕がバランスするように配置することが課題です。これらの問題では、モビールを作っているワイヤーには重さが無いものと仮定します。モビールのそれぞれの腕は、バランスを取る必要があるてこなので、これらのパズルはてこのバランスの発展問題になります。これら始める前に、まずはてこのバランスの問題を練習しておきましょう。

まずは、空中にあるてこにすぎない、最も簡単なモビールから始めます。ここに、1から4までのおもりを使って、このモビールをバランスさせる解の一例があります。これは、吊り下げ点を支点とすることで機能します。このモビールでは、 $2 \times 4 + 1 \times 2 = 4 \times 1 + 3 \times 2$ となっています。

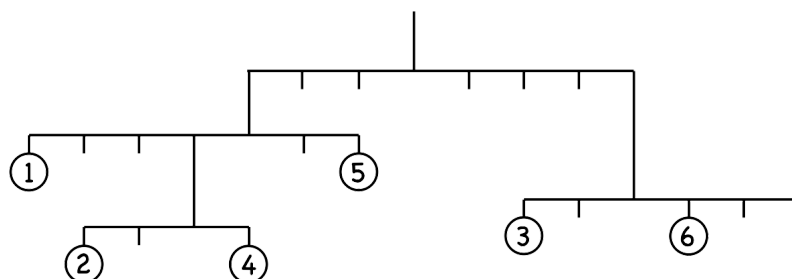


モビールに複数の段がある場合、それぞれの段にある各腕が、てことしてバランスしていなければなりません。次のモビールでは、下の2本の腕は、 $1 \times 3 = 3 \times 1$ 、また、 $4 \times 1 = 2 \times 2$ となるため、バランスが取れています。その上の段については、下にぶら下がっているおもりの重さを合計します。例えば、左側の重さは $1 + 3 = 4$ です。次の段から見れば、下の腕のどの位置におもりが付いているかは関係ありません。したがって、次の段では、 $(1 + 3) \times 3 = (4 + 2) \times 2 = 12$ となり、最上段もバランスが



取れていることが分かります。

モビールのパズル作りを楽しみましょう。最後に、1から6までの数字を使った問題があります。それぞれの数字を1回ずつ使ったり、凝った作りにしたりする必要はありません。完成したパズルであれば、どれでも楽しいものになります。各段を確認すると、次のようになります。 $2 \times 2 = 4 \times 1$; $1 \times 4 + (2 + 4) \times 1 = 5 \times 2$; $3 \times 2 = 6 \times 1$; $(1 + 2 + 4 + 5) \times 3 = (3 + 6) \times 4$ 。このように、すべての段でバランスが取れています。



第5章 - ボックスの分割

- 導入 -

4×4以上の大きさの長方形があり、そのいくつかのマスには数字が書かれています。この長方形は、より小さな長方形に分割されます。それぞれの数字は、その数と同じ面積を持つ、他と重ならない1つの長方形の中に必ず収まらなければなりません。

大人であれば、このようなパズルを作るのはそれほど難しくありません。まず長方形を1つ用意して、その中をいくつかの長方形に分けます。次に、それぞれの長方形の中に、その面積を表す数字を書き込みます。そして最後に、分割した線や形が分からないように、すべて消してしまいます。少し工夫が必要なのは、解く人にとってほどよく解きやすくなるように数字を置くことです。もし難しすぎると感じたら、必要に応じてヒントを出してあげてもよいでしょう。

- 解決戦略 -

これから、このようなパズルを解くときに役立つ、いくつかの基本的な考え方をご紹介します。できるだけ、パズルで遊ぶ中で、これらのルールをお子さん自身が見つけられるようにしてあげてください。そして、見つけたルールを一緒にリストにしてまとめてみましょう。

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

1) 長方形の形が1通り、または2通りしか考えられない数字に注目しましょう。

2つの4はいずれも、かなり条件が限られています。どちらの4も、1×4か2×2の長方形の中に入ることができません。上の4は周囲を囲まれているため、1×4の長方形に入ることはできません。そのため、左上には必ず2×2の長方形があることとなります。そうすると、下の4に残される可能性は1つだけで、その長方形は1×4となり、下の辺に沿って配置されることとなります。

2) 素数に注目しましょう。素数は、必ず1×nの長方形の中に入ることとなります。

上のパズルにある3は、必ず1×3の長方形の中に入らなければなりません。右上の角にある3は、上の辺に沿った1×3、または右の辺に沿った1×3のどちらかにしかありません。しかし、左上の2×2のマスが4のために使われているので、上の辺に沿って1×3の長方形を作ることはできません。

下の辺に沿った1×4の長方形の配置によって、下にある2つの3のうち、下の3の1×3の長方形は、縦方向の2つの可能性のうち上側の位置に決まります。

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

3) 長方形の最大の辺に近い数字は、選べる形が少ないことが多いです。

次のパズルにある6と5に注目してみましょう。上の6は広いスペースが必要で、十分なスペースを確保できるのは、縦にまっすぐ下に伸ばして列全体を使う方法だけです。もうひとつの6は、上の6の列によって行が遮られているため、1×6にはできません。したがって、下の6は2×3の長方形である必要がありますが、まだ完全には決まっています。

別の例として、このパズルに8があった場合を考えると、1×8の長方形は入らないので、必ず2×4の長方形の一部になることになります。

4) 周りを囲まれたマスは、選べる形が少なくなります。

一番上の5は周りを囲まれているため、5マスの列に入る以外の選択肢はありません。もうひとつの5は、素数なので縦か横のどちらかにしか入れません。横方向は6の列によって遮られているため、縦方向に配置され、上に向かって3のすぐ下まで伸びることになります。

5) 角のマスは、選べる形が非常に限られることが多いです。

右上の角にある2は、横方向にしか入れられないため、簡単に配置することができます。

第5章 - 文字置換パズル

- 導入 -

お子さんが、この章の数ページ前にあった「欠けている数字」のパズルに慣れてきたら、次はこのパズルに挑戦できます。このパズルでは、数字のうち1つ以上が文字に置き換えられています。文字に関するルールは、次の3つです。

- 同じ文字は、いつも同じ数字を表します。
- 数字の左端の桁は、0になることはありません。
- 異なる文字は、必ず異なる数字を表します。

これらのパズルは、足し算や引き算の問題の数字の一部を文字に置き換えることで作ることができます。また、お子さんにとって面白い問題解決のチャレンジになるように作ることもできます。文字の値は、パズルごとに変わることに注意してください。

- 例 -

最初の例では、通常の足し算や引き算の問題を、文字に置き換えたパズルにする方法を示しています。最初のバージョンでは、すべての6をAに置き換え、次のバージョンではさらに2をBに置き換えています。

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 23 \quad B3 \\ +4A \quad +4A \\ \hline A9 \quad A9 \end{array}$$

これ以降の例は、それぞれの状況の性質を使って解けるように、注意深く作られています。覚えておきたい性質の1つは、2つの数字を足すとき、次の桁への繰り上がりは必ず0か1のどちらかになるということです。たとえば、問題「A+A=C4」の場合、Cは0にはできないので、必ず1になります。

$$\begin{array}{r} B \quad B \quad A \quad A \quad D \quad A \\ +8 \quad +B \quad +A \quad +2 \quad +2 \quad +B \\ \hline C \quad 8 \quad C4 \quad BC \quad EE \quad AC \end{array}$$

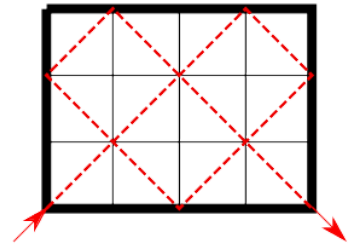
$$\begin{array}{r} A \quad C \quad A \quad A \\ A \quad C \quad A \quad A \quad A \quad B \\ +A \quad +C \quad +7 \quad +B \quad +BB \quad +AB \\ \hline B2 \quad D4 \quad B \quad B0 \quad A7 \quad BA \end{array}$$

$$\begin{array}{r} BA \quad AD \quad AA \quad AA \quad AA \quad AA \\ +BB \quad +BD \quad +BA \quad +CB \quad +AB \quad +AA \\ \hline CAB \quad BCC \quad BBC \quad BBC \quad CAC \quad BBC \end{array}$$

第5章 - 図形で遊ぶ

－ バウンスビリヤード － はじめに －

各隅にポケットがあるビリヤード台を想像してください。ボールが台の側面に当たって跳ね返るとき、入ってきた角度と同じ角度で跳ね返ります。左下の角から45度の角度でボールを打った場合、ボールはどこに行き着くのでしょうか。その答えは、台の大きさによって異なります。右に示されている図は、3×4の大きさの台の場合に起こる結果を表しています。



お子さんにテーブルの絵を渡し、どの角に最初に当たるのか、そしてその角に到達するまでに何回跳ね返るのかを予想させてみてください。

－ バウンスボール － 分析 －

まずは、お子さんにこの問題で自由に遊ばせてあげてください。結果を急いで見つけようとする必要はありません。ご覧のとおり、この問題には、年少の方にとってはかなり高度な考え方が含まれています。必要に応じて、1つか2つ質問をして、お子さんの考えを少し整理してあげてください。これから何をするのかはもうお分かりでしょう。まずは、より簡単なテーブルから調べて、規則性を探してみてください。この考え方がお子さんにとって自然に使えるものになれば、この先の人生において大いに役立つはずです。

最も簡単なテーブルは $1 \times n$ の大きさのもので、理解しやすいです。いくつかの n の値で遊んでみると、すぐにパターンが見えてきます。このような単純な結果を軽視しがちですが、完全に理解できた結果はどれも称賛に値します。そして、この結果はさらに他の発見へとつながっていきます。

結果: $1 \times n$ のテーブルの場合、ボールは $n - 1$ 回跳ね返ります。 n が偶数の場合、ボールは右下の角に到達し、 n が奇数の場合、ボールは右上の角に到達します。

次に簡単なテーブルは $2 \times n$ のもので、ここではパターンが少し複雑になります。このような場合、きちんと記録を取ることが大きな助けになります。観察力のある実験者は、 2×4 のテーブルは 1×2 のテーブルと同じように振る舞い、 2×6 のテーブルは 1×3 のテーブルと同じように振る舞うことに気づくでしょう。これにより、次の結果がすぐに一般化されます。

結果: $2 \times 2 \times n$ のテーブルは、 $1 \times n$ のテーブルと同じように振る舞います。

なぜでしょうか？何が起きているのでしょうか？これはお子さんに身につけさせたい数学的なプロセスです。パターンを見つけ、それを理解しようとし、その新しい理解をもとに以前の結果を拡張していくことを学びます。

起こっていることは、テーブルの両方の寸法を同じ比率で拡大しても、ボールの跳ね返りは変わらないということです。その場合、テーブルは大きくなりますが、幾何学的な関係は同じままです。幾何学の用語では、この二つのテーブルは「相似」であると言われます。

結果: $k \times m \times k \times n$ のテーブルは、 $m \times n$ のテーブルとまったく同じように振る舞います。

私たちは小さな一歩ずつここまで来ましたが、これはなかなか大きな成果だと思います。これは、どの表に対する分析も、まず共通の因子を取り除くことから始められるということを意味しています。

$2 \times n$ の表について、前回のところから再開します。 n が偶数の場合については分かっていますが、 n が奇数の場合はどうなるのでしょうか。 $n=1, 3, 5, 7$ などの $2 \times n$ では何が起こるのでしょうか。そのパターンは、すぐに見えてくるようになります。

結果: n が奇数のとき、 $2 \times n$ の表では n 回バウンドし、最終的に左上の角に到達します。

大きな進展が見られています。さらにいくつかの例で試してみると、いくつかの新しいパターンも見えてきます。

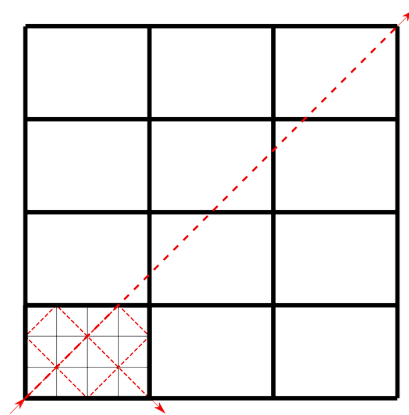
結果: n が3の倍数でない場合、 $3 \times n$ の表では $n+1$ 回バウンドし、 n を3で割った余りが1のときは右上の角に、余りが2のときは右下の角に到達します。 n が奇数の場合、 $4 \times n$ の表では $n+2$ 回バウンドし、左上の角に到達します。 n が5の倍数でない場合、 $5 \times n$ の表では $n+3$ 回バウンドし、 n が奇数のときは右上の角に、偶数のときは右下の角に到達します。

この時点で、私たちはデータを見返し、いくつかのパターンを見つけて、いくつかの予想を立てたくになります。

推測: k と n が共通の約数を持たないとします。すると、 $k \times n$ の表では $k+n-2$ 回バウンドします。 k が偶数の場合は左上の角に到達します。 k が奇数で n も奇数の場合は右上の角に、 k が奇数で n が偶数の場合は右下の角に到達します。

わあ、もしこの予想が正しければ、この問題は完全に解決したことになります！何が起こるか、もう分かりますね...では、この予想がなぜ正しいのかを説明できるか(あるいは間違っていることを突き止めるか)見てみましょう。

この状況を理解する他の方法もありますが、この問題をずっと分かりやすくするのは新しい考え方です。あなたには思いもよらないかもしれませんが、一度それを見ると、おそらく驚くことでしょう。その考え方とは、表を展開してボールがまっすぐ進めるようにすることです。元の 3×4 の表を展開し、ボールの経路をまっすぐにした場合、次のようになります。



この予想が正しいことを確認するのは、今ではずっと簡単です。バウンドは線を横切ることに対応しており、一方向には $(k-1)$ 本、もう一方向には $(n-1)$ 本の線を横切ることになるので、合わせると $(k-1)+(n-1)=k+n-2$ 本の線を横切ることになります。どの角に到達するかを見るのは、展開の様子を追っていけば分かります。これで、非常に興味深い旅はすべて終わりです。

— 領域を図形で埋める — はじめに —

8×8のチェス盤と、1×2のタイルの集合があると仮定します。これらの1×2のタイルを32枚使って、チェス盤を隙間なく正確に覆う方法を見つけることは、十分に簡単です。

それでは、チェス盤からいくつかのマスを取り除いて、何が起こるかを見ていきましょう。チェス盤の角を1つ取り除くと、タイルは常に偶数個のマスを覆うため、もはやタイルでチェス盤を覆うことができないことがすぐに分かります。現在、覆うべきマスは63個しか残っていないからです。では、残りのマスの数が偶数になるように角を2つ取り除いた場合、今度は覆うことができるでしょうか。答えは、どの2つの角を取り除くかによって異なります。それはなぜでしょうか。さらに、角を取り除くという制限を設けずにマスを取り除いた場合、何が起こるのでしょうか？

— 領域を形状で埋める — 解析 —

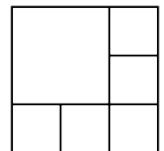
着色のアイデアを明かす前に、まずお子さんにこれで遊ばせてあげてください。小さな盤でいろいろ試しているうちに、自分でその規則を発見するかもしれませんし、それは常により良いことです。

この問題を考えるうえで大いに役立つ観察は、チェス盤のマスの色分けを利用することです。1×2のタイルを取り、それぞれのタイルの一方のマスを白、もう一方のマスを黒に塗ると、興味深いことが起こるのが分かります。どのタイルも必ず白と黒のマスを1つずつ覆わなければなりません。k枚のタイルは2×k個のマスを覆うだけでなく、白のマスをk個、黒のマスをk個、つまり各色同じ数のマスを覆います。この考え方を使うと、ある色のマスを別の色より多く取り除いてしまった場合、その盤を覆うことが不可能になることが明らかになります。

お子さんがこれらの問題を楽しんでいるようであれば、他の形を使って盤を埋めることにも挑戦してみてください。1×3のタイルや、3つのマスからなるL字型のタイルで埋めてみるのもよいでしょう。それらでは、どのようなパターンや規則が見つかるでしょうか。また、他にどのような形で遊んでみると面白いでしょうか？

— 正方形を正方形で埋める — はじめに —

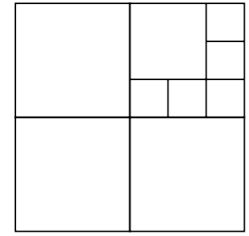
すべて同じサイズである必要がない、正方形を他の正方形で埋める方法にはどのようなものがありますか？ただし、長さを完全にランダムにすることはできません。各正方形の辺の長さは、固定長の整数倍でなければなりません。調査すべき問題は、考えられるすべての平方数は何でしょうか？また、数値で可能であることがわかっている場合、これを行う方法を説明する簡単な方法がありますか？



お子さんに何日もかけて遊ばせ、答えに急がないようにしてください。この調査にはさまざまなアイデアの出し方があるので、柔軟に対応し、お子さんの考えに合わせて進めてください。こちらの図は、6個で可能であることを示しています。

いくつかの簡単な例を考えることは、いつでも良いアイデアです。まずは大きな正方形を同じ大きさの小さな正方形に分けることから始めると簡単です。そこから、平方数(1、4、9、16、25、...)はすべて可能であることが分かります。

6個の正方形の例をもとに、大きな正方形を1つ使い、その辺のうち2辺に1×1の正方形を置く方法が考えられます。この方法を、より大きな正方形(1×1、2×2、3×3、...)に対して行くと、 $1+3=4$ 、 $1+5=6$ (図の通り)、 $1+7=8$ 、 $1+9=10$ 、と続きます。つまり、この方法では4から始まるすべての偶数が可能です。



この考え方をを使うと、問題を素早くまとめることができます。すなわち、うまくいく図を1つ取り、その正方形のうちの1つを別のうまくいく図に置き換えることができます、ということです。例えば、1×1の正方形4つで埋めた簡単な2×2の図を取り、その1つの1×1の正方形を6個の正方形の例に置き換えると、右に示すように9個の正方形の図が得られます。

ある正方形をn個の正方形でできた図に置き換えるので、正方形の数の純増分はn-1 となります。つまり、ある数が可能であれば、その数より1少ない数の倍数を他の可能な数に加えることができます。特に、4個の正方形の場合は $4-1=3$ なので、他の可能な数に3 の倍数を加えることができます。加えやすいのは、4から始まるすべての偶数です。

これらをすべてまとめると、1、4、6、7、8、9、... のような数はすべて可能であり、それらを構成する少なくとも1つの簡単な方法を見ることも容易です。また、2、3、5は不可能であることも簡単に納得できます。

お子さんがその問題を楽しんでいるようであれば、このテーマのバリエーションにも挑戦してみてください。例えば、使える正方形のサイズを1×1、2×2、3×3に限定する、あるいは2×2と3×3だけに限定する、などです。どのような問いが面白い結果につながるか、どれがあまり面白くないかを見てみましょう。

別の方向性としては、同じ形をした図形で他の図形を埋めることを考えてみる方法があります。例えば、正三角形(すべての辺の長さが同じ三角形)について同じ問いを考えてみるのです。この方法で調べると面白い図形もあれば、まったく面白くない図形もあります。どの図形が面白く、どの図形がそうでないかを考えてみましょう。

第5章 - プロダクトゲーム

- 導入 -

次のように記入した共用の紙を使ってください：

最初のプレイヤーは、下の列の1から9までのいずれかのマスにコマを置きます。次のプレイヤーは、下の列の1から9までのいずれかのマスに別のコマを置き、6×6のマス目の積を獲得します。その後は、各プレイヤーが2つのコマのどちらかを動かして、(可能であれば)積を獲得します。最初に縦・横・斜めのいずれかで3マスを獲得したプレイヤーが勝ちです。6×6のマス目の積の数字を混ぜて、お子さんが積を認識する練習がよりよくできるようにしましょう。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

これらのプレイボードは、好きな大きさに作ることができますが、かなり早く大きくなってしまいます。こちらに、いくつかの大きめのボードと、それに対応する下の数字の範囲を示します。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

赤い星のついたマスは「フリー」マスで、必要に応じてどちらのプレイヤーも使用することができます。

第5章 - 有限計算機

- 導入 -

壊れてしまった電卓を持っていると仮定して、その電卓で何らかの結果を出すように挑戦させられているとします。簡単なパズル形式の説明を考えることで、興味深いチャレンジとなるさまざまなシナリオを作り出すことができます。このアクティビティは、ちょっとした空き時間があれば、口頭で気軽に遊ぶことができます。以下に、始めるための例をいくつか示します。

これらの問題の中には、より深い数学が関わっている場面もいくつかありますが、ほとんどの場合、単に遊びとして楽しむための問題です。

1a) +、-、×、÷ の機能は使えますが、使える数字キーが4だけの電卓を持っていると仮定します。結果として21を出すことはできますか。できるとしたら、必要な手順の最小回数はいくつですか？

$4+4+4+4+4+4/4=21$ は一つの方法ですが、他にも多くのやり方があります。例えば、 $4 \times (4+4/4) + 4/4$ という方法もあります。目的は、いろいろ試して探索を楽しむことです。

1b) 4を最大で4回まで使ってよいとしたら、どのような数を作ることができますか。また、4を必ずちょうど4回使わなければならないとしたら、どうでしょうか。

子どもの算数の道具や知識が増えてくると、「4つの4」の問題は楽しいパズルになります。この段階では使える方法はかなり限られていますが、それでもいろいろ試してみるのとはとても楽しいです。割り算を使ったり、小数を使ったりしないと、多くの数を作るのは特に難しくなるでしょう。すべての数を順番に考え出そうとする必要はありませんので、できるだけたくさんの異なる数を考えてみてください。

始めるための例をいくつか示します。

以下はいくつかの例です。

$$1 = (4/4) \times (4/4) = 44/44$$

$$2 = 4 / ((4+4)/4)$$

$$3 = (4+4+4)/4$$

$$4 = (4-4) \times 4+4$$

$$6 = 4 + (4+4)/4$$

$$7 = 44/4-4$$

$$8 = (4+4) \times (4/4) = 4+4+4-4$$

$$32 = 4 \times 4 + 4 \times 4$$

1c) ほかの1つの数字を使って、さまざまな結果を作る遊びをしてみましょう。

2a) 電卓で使える操作が「4を足す」と「7を足す」だけだとしたら、どのような数を作ることができますか。

これはこれまでに何度も見てきた結果です。(4-1)×(7-1)から始めると、4と7の倍数を足すことで、すべての数を作ることができます。

例: $18=2\times 7+4$ 、 $19=3\times 4+7$ 、 $20=5\times 4$ 、 $21=3\times 7$ 、...という具合です。

2b) 電卓で使える数字が4と7で、足すことと引くことができるとしたら、どのような数を作ることができますか。

この方法ですべての数値を生成できます。

2c) 4と7の代わりに、ほかの数字の組み合わせを使ってみましょう。これらの組み合わせでは、どのような結果が得られるでしょうか。

整数論では、これはベズーの定理と呼ばれます。この定理によると、2つの数の倍数を組み合わせることで、その2つの数の最大公約数の倍数であれば、どの整数でも作ることができる、ということです。

3) もし電卓に「1」のキーしかなく、操作は「足す」と「倍にする」だけだとしたら、どのような数を作ることができますか。例えば、 $2\times(2\times 1)+1=5$ のように作れます。他にどんな数を作れるでしょうか。

これは実は二進数の問題を少し変えた形です。お子さんがこれに気づいたり理解したりする必要はなく、ただ遊ぶためのものです。すべての数は二進数で表すことができるので、「倍にする」と「1を足す」を組み合わせれば、どんな数も作ることができます。例えば、21は $16+4+1$ と分解できます。

よって、21は次のように作れます:

$$21=2\times(2\times(2\times(2\times 1+0)+1)+0)+1$$

第5章 - ダブル・オア・ナッシング

- 導入 -

プレイヤーは、20より大きく120以下の異なる5つの数を内緒で選んでゲームを始めます。選ばれた後、その数は全員が見える場所に書かれます。ナンバーカードや他の装置を使って、1～20の中からランダムな数が作られます。その数は、誰かの数に初めて一致するか、または数が120を超えるまで、繰り返し2倍にされます。5つすべての数が最初に当たったプレイヤーが勝者となります。

- 分析 -

問題は、どの5つの数を選ぶのが最善か、ということです。考えるためのいくつかのアイデアを以下に示します。

ルール: 常に、1～20の数に2の累乗を掛けた数を選びます。

例えば、23や46のような数を選ぶと、それらは決して当たることがなく、必ず負けてしまいます。

ルール: 決して、選ぶことができたが選ばなかった別の数の2倍になっている数は選ばないようにします。

44を選ぶのであれば、なぜ代わりに22を選ばないのでしょうか？ もし相手が22を選んだ場合、あなたは1回分を逃してしまいます。

さらに分析すると: 1～20の数は同じ確率で選ばれます。しかし、例えば9は18に繋がるため、18は出発点として、11よりも2倍の確率で選ばれることとなります。異なる出発点に至る方法を組み合わせると、出発点の確率は次のようになります。

11 - 1/20(11から)

12 - 3/20(3、6、12から)

13 - 1/20(13から)

14 - 2/20(7、14から)

15 - 1/20(15から)

16 - 5/20(1、2、4、8、16から)

17 - 1/20(17から)

18 - 2/20(9、18から)

19 - 1/20(19から)

20 - 3/20(5、10、20から)

明らかに、最も良い数は16、12、20の倍数です。シンプルな戦略としては、次の5つの数を使うことです: 32、64、24、48、40。これらの数が必ず勝つわけではありませんが、長期的には非常に有利に働くはずです。